

## Posibles cambios en las concepciones de profesores universitarios sobre las causas de los errores (de sus estudiantes) en el aprendizaje de la matemática

**Henry Alexander Ramírez Bernal**

*Doctorado en Educación DIE, Universidad Distrital Francisco José de Caldas,  
Bogotá, Colombia*

*Grupo de investigación MESCUUD (Matemáticas Escolares Universidad Distrital),  
Bogotá, Colombia*

*NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica), Universidad de Bologna, Italia*

**Abstract.** *This paper summarizes a PhD research in development which aims to characterize the possible changes in the conceptions of a group of mathematics teachers of the first semesters of university on the causes of the errors (of their students). The discussion and reflection between teachers in focus groups and individual interviews in relation to theoretical referents (presented by the researcher) may help to explain the possible causes of the error in mathematics of their students, by seeking to promote the change of their conceptions about the nature of the error.*

*Keywords:* obstacle, misconception, didactic contract, conversion, treatment, Duval's cognitive paradox, change of conceptions.

**Sunto.** *In questo articolo si sintetizza una ricerca dottorale in corso il cui scopo principale è di caratterizzare i possibili cambi di concezioni di un gruppo di professori di matematica dei primi semestri di università circa le cause degli errori (dei propri studenti). Si auspica che la discussione e la riflessione fra professori in focus group e le interviste individuali relative a referenti teorici (presentati dal ricercatore) possano aiutare a spiegare dal punto di vista della didattica della matematica le possibili cause dell'errore in matematica degli studenti, potendo arrivare a realizzare un cambio nelle convinzioni sulla natura di tali errori.*

*Parole chiave:* ostacolo, misconcezione, contratto didattico, conversione, trattamento, paradosso cognitivo di Duval, cambio di concezioni.

**Resumen.** *En el presente artículo se sintetiza una investigación doctoral en desarrollo cuyo propósito fundamental es caracterizar los posibles cambios en las concepciones de un grupo de profesores de matemática de primeros semestres de universidad sobre las causas de los errores (de sus estudiantes). La discusión y reflexión entre profesores en grupos focales (focus group) y entrevistas individuales en relación a referentes teóricos (presentados por el investigador) pueden ayudar a explicar las posibles causas del error en matemática de sus estudiantes, tratando de promover el cambio de sus concepciones sobre la naturaleza del error.*

*Palabras clave:* obstáculo, misconcepción, contrato didáctico, conversión, tratamiento, paradoja cognitiva de Duval, cambio de concepciones.

## 1. Premisa

La investigación doctoral está motivada fundamentalmente por el interés del autor en profundizar en el estudio de la forma como el profesor universitario concibe los errores de sus estudiantes en matemática, cómo explica sus posibles causas, cómo las aborda en sus aulas de clase y cómo se puede contribuir a mejorar la comprensión de la naturaleza del error, gracias a herramientas traídas de la didáctica de la matemática, por parte de los docentes. El conocimiento de las causas del fracaso de los estudiantes en matemática puede proporcionar al docente herramientas para ayudar a mejorar el desempeño de sus estudiantes, lo cual es coherente con lo propuesto por Brodie (2014) quien resalta la importancia de profundizar en la investigación en educación matemática sobre los errores del alumno y en cómo los maestros pueden aprender a identificar y comprometerse con el razonamiento detrás de estos errores. Algunas investigaciones han mostrado que los profesores de matemática explican en muchos casos las causas de los errores de sus estudiantes a partir de ideas ingenuas y banales, esto es, sustentándolas en creencias y concepciones que distan de las explicaciones que se proponen desde la investigación en didáctica de la matemática. La investigación doctoral pretende profundizar en la comprensión de los posibles cambios en las concepciones sobre las causas del error que se pueden producir en un grupo de profesores de matemática de primeros semestres de universidad mediante escenarios de discusión y reflexión crítica en relación a referentes teóricos propuestos desde la didáctica de la matemática que intentan explicar las causas del error en matemática; este estudio se enmarca de forma pertinente en la comprensión de cómo pueden aprender los profesores de matemática, ubicándose por tanto en una línea de investigación sobre la formación de profesores a nivel universitario.

## 2. Marcos teóricos

### 2.1. *El estudio del error en el aprendizaje de la matemática*

Diversas nociones propuestas desde la didáctica de la matemática contribuyen a explicar las posibles causas de los errores en matemática de los estudiantes: obstáculo, dificultad, misconcepción, contrato didáctico, representaciones semióticas y paradoja cognitiva de Duval.

Para D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sbaragli (2010) el *error* en matemática es sólo la manifestación de un malestar cognitivo. Brousseau (1983) considera que el error no es necesariamente y sólo un resultado de la ignorancia, la incertidumbre y el azar, sino que es resultado de un conocimiento previo el cual fue exitoso, pero que ahora es erróneo o simplemente no es aplicable. Adicionalmente Brousseau (2001) señala que en didáctica de la matemática los errores son específicos de un conocimiento y/o de una situación matemática, son inherentes al proceso de aprendizaje y al

proceso de enseñanza; el maestro debe combinar un nivel de riesgo de error soportable y una probabilidad suficiente de beneficio de él. Para Brousseau los errores en matemática se vinculan con el concepto de obstáculo enfatizando en el análisis epistemológico y en el estudio histórico de las ideas matemáticas.

Los *obstáculos* pueden considerarse como cualquier cosa que se interpone al aprendizaje en la dirección docente-estudiante, no son necesariamente falta de conocimiento y a veces son expresiones de conocimiento (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sbaragli, 2010); en opinión de estos autores, el estudiante utiliza este conocimiento para dar respuesta adecuada en un contexto conocido encontrado en precedencia pero puede fracasar cuando lo usa fuera de ese contexto, generando respuestas incorrectas. Los obstáculos en el aprendizaje matemático pueden ser de carácter ontogenético, didáctico o epistemológico (Brousseau, 1976). Las limitaciones de las capacidades cognitivas de los estudiantes dentro del proceso de enseñanza definen los *obstáculos ontogenéticos* (Artigue, 1990); la elección de un determinado proyecto o sistema educativo por parte del docente pueden determinar *obstáculos didácticos* (Brousseau, 1976); los *obstáculos epistemológicos* de acuerdo a Brousseau (1976) son constitutivos del conocimiento en que se apuntan y se pueden encontrar en la historia de los conceptos mismos.

Godino, Batanero y Font (2003) señalan que el término *dificultad*:

indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que, si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja. (p. 69)

La dificultad en matemática puede asumir por lo menos tres sentidos distintos como lo indican D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli (2010): la dificultad en matemática del estudiante, la dificultad específica de algunos argumentos de la matemática y la dificultad del docente en la gestión de una situación matemática. Fandiño Pinilla (2010) propone cinco tipologías de aprendizaje diferentes, no libres de superposiciones, que contribuyen a analizar diversos componentes del aprendizaje matemático: conceptual o noético, algorítmico, estratégico, comunicativo y aprendizaje y gestión de las representaciones semióticas.

En el proceso de aprendizaje matemático se pueden generar conceptualizaciones erróneas que de perdurar obstaculizan la comprensión matemática, dando lugar a *misconcepciones*.<sup>1</sup> Silver (1985) vincula

---

<sup>1</sup> De acuerdo con D'Amore y Sbaragli (2005) el término *misconcepción* ha sido usado por décadas en la investigación en educación matemática e interpretado usualmente con connotaciones exclusivamente negativas, como juicio erróneo, idea equivocada, equívoco o malentendido y también en un sentido más extenso como concepción falaz. La palabra *misconcepción* del idioma español se considera en este documento como equivalente a la palabra inglesa *misconception* y al término en italiano *misconcezione*. Pero el sentido dado por estos dos autores es muy diferente, pues pierde el carácter totalmente negativo.

fuertemente las misconcepciones con las creencias erróneas; Schoenfeld (1985) señala que los estudiantes pueden desarrollar algunas concepciones incorrectas, particularmente en relación con los procedimientos. En contraste, D'Amore (1999, como se cita en D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sbaragli, 2010, p. 78) propone un sentido constructivo para definir el término *misconcepción* señalando que es sí un concepto erróneo, el cual constituye un acontecimiento que debe evitarse al final de los estudios; para D'Amore pero no debe verse como una situación del todo negativa: para lograr la construcción de un concepto puede ser necesario pasar a través de una *misconcepción* momentánea.

El contrato didáctico, de acuerdo con Alagia, Bressan y Sadovsky (2005), incorpora al análisis de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática “un aspecto esencial: la intención de que el alumno aprenda un saber cultural, intención que tiene el docente y que necesariamente el alumno debe compartir” (p. 37). El interés original de Brousseau (2007) por las causas del fracaso electivo en matemática y que se ubican en la relación del alumno con el saber y con las situaciones didácticas y que no estarían ligadas con sus aptitudes u otras características, originó la noción de contrato didáctico. El contrato didáctico para Brousseau (1986, como se cita en D'Amore, 2005) está constituido por los hábitos específicos del profesor esperados por el alumno y los comportamientos del alumno esperados por el profesor que ocurren en una situación de enseñanza preparada y realizada por el maestro. D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sarrazy (2010) presentan una visión crítica y moderna sobre el contrato didáctico. Algunos efectos que se desprenden de la noción de contrato didáctico contribuyen a explicar las causas de algunas tipologías de errores en el aprendizaje matemático.<sup>2</sup>

El trabajo matemático se realiza con representaciones semióticas de los objetos matemáticos dado que es imposible acceder a los objetos matemáticos directamente, lo cual implica fuertes dificultades en el aprendizaje,<sup>3</sup> como se sintetiza en la paradoja cognitiva de Duval (Duval, 1993). La comprensión del funcionamiento de las representaciones semióticas implica el estudio de sus transformaciones (tratamiento y conversión). Para Duval (2006) estas transformaciones están en el corazón de la actividad matemática y su diferenciación constituye el primer requisito metodológico para analizar los problemas de comprensión matemática de los estudiantes. Tanto la conversión (Duval, 2006) como el tratamiento (D'Amore, 2006; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; Rojas, 2014; Santi, 2010) son fuente de fuertes dificultades en el aprendizaje matemático.

---

<sup>2</sup> Entre estos efectos se pueden citar (Brousseau, 2007): el efecto Topaze, el efecto Jourdain, los deslizamientos metacognitivos y metadidácticos, el uso abusivo de la analogía y el envejecimiento de las situaciones de enseñanza.

<sup>3</sup> Lo cual es coherente con la dificultad analizada en el sentido del aprendizaje semiótico propuesto por Fandiño Pinilla (2010).

## *2.2. Las concepciones y creencias sobre las causas del error en matemática*

Las creencias y concepciones de los profesores sobre la matemática y su aprendizaje están fuertemente ligadas con su enseñanza. Las creencias pueden considerarse como verdades personales indiscutibles sustentadas por cada uno, que se derivan de la experiencia o de la fantasía y que tienen un fuerte componente evaluativo y afectivo (Pajares, 1992). “No se fundamentan en la racionalidad sino sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo” (Moreno & Azcárate, 2003, p. 67). Las creencias permean e influyen en la relación de los individuos con la matemática; Schoenfeld (1992, como se cita en: Pehkonen & Törner, 1999) señala que las creencias son comprensiones y sentimientos que dan forma a la manera en que un individuo conceptualiza y se involucra con el conocimiento matemático; García, Azcárate y Moreno (2006) presentan algunas características de las creencias del profesor: se asocian a ideas personales e influyen en su toma de decisiones, influyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tienen un valor afectivo, son un tipo de conocimiento y se justifican sin rigor alguno.

Algunos investigadores señalan que las concepciones tienen un mayor nivel de racionalidad, elaboración cognitiva y de consciencia en comparación con las creencias. Para García, Azcárate y Moreno (2006) las concepciones “consisten en la estructura que cada profesor de matemáticas da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes” (p. 87). Estos autores adicionalmente caracterizan algunas de las concepciones del profesor: forman parte del conocimiento, son producto del entendimiento, actúan como filtros en la toma de decisiones e influyen en los procesos de razonamiento. D’Amore (2008) define epistemológicamente la concepción como:

un conjunto de convicciones, de conocimientos y de saberes científicos, que tienden a decir cuáles son los conocimientos de los individuos o de los grupos de personas, su funcionamiento, las formas de establecer su validez, de adquirirlas y por tanto de enseñarlas y de aprenderlas. (p. 2)

Se asume en este trabajo el sentido de racionalidad y elaboración cognitiva de las concepciones a diferencia de las creencias que no se sustentan en la racionalidad (Brousseau, 2001).

## **3. Problema de investigación**

Gagatsis y Kyriakides (2000) han señalado que el interés en el estudio del error condujo a la formación de diversas teorías sobre la naturaleza de los errores matemáticos, su interpretación y formas de superarlos. En estos

referentes teóricos se abordan aspectos epistemológicos, semióticos y didácticos entre otros, los cuales intentan desde hace años y en diferentes direcciones explicar las causas reales de estos errores. En contraste, estudios de algunos autores como Charnay (1989), Economou (1995) y Milhaud (1980) citados por Gagatsis y Kyriakides (2000) y de Ramírez (2013) han sugerido que los profesores presentan explicaciones sobre las causas de los errores en matemática de sus estudiantes que se distancian de estos referentes teóricos y de investigación; tales explicaciones están vinculadas con creencias y concepciones a veces ingenuas de los profesores, de tal forma que éstas influyen negativamente en la forma como los profesores conciben las causas del error en matemática.

Por otra parte, el profesor puede y debe ayudar al estudiante a mejorar su desempeño en matemática, lo cual implica ayudarlo a superar sus errores. Es conveniente por tanto que el profesor de matemática profundice en la comprensión de la naturaleza del error como lo han señalado Ball, Thames y Phelps (2008); según estos autores, los profesores deben ser capaces de analizar las verdaderas causas de los errores matemáticos de manera eficiente y fluida; Borasi (1987) y Brodie (2014) coinciden en llamar la atención sobre el potencial del error como una posible vía para que el profesor pueda acceder al pensamiento de los estudiantes en su forma de hacer matemática. Si la forma en que el profesor de matemática aborda durante su ejercicio profesional los errores en el aprendizaje matemático está privilegiadamente influida por creencias y concepciones ingenuas o distantes de las explicaciones teóricas sobre estos errores y sus causas, difícilmente podrá realizar una gestión efectiva en el aula para mejorar la comprensión de sus estudiantes. La posibilidad de que los profesores modifiquen sus concepciones sobre las causas de los errores en el aprendizaje en matemática al tomar consciencia de la necesidad de explicaciones más elaboradas (sustentadas por ejemplo en referentes teóricos propuestos en didáctica de la matemática), y que disten cada vez más de explicaciones ingenuas, podría contribuir favorablemente en su práctica de enseñanza. Lo anterior es coherente con el hecho que las creencias de los profesores tienen un fuerte impacto en las prácticas de enseñanza (Ernest, 1989). De acuerdo con Lerman (1999) en el corazón de la investigación sobre las creencias de los profesores se encuentra el argumento que las creencias y las concepciones de los profesores o los estudiantes para profesor deben cambiar para que cambien su enseñanza, la forma de evaluar los errores y la forma de poner en marcha acciones que ayuden a los estudiantes. En un sentido similar se han expresado recientemente otros autores como Bobis, Way, Anderson y Martin (2016) quienes señalan la importancia de desarrollar una mejor comprensión de los conocimientos y creencias de los profesores sobre la participación de los estudiantes (en matemática), incluyendo cual es la mejor forma de modificar estas creencias y

mejorar sus conocimientos a fin de influir de manera más positiva sus prácticas de enseñanza.

Para Pehkonen (1999, 2006) un profesor debe ser consciente de sus acciones y debe reflexionar sobre ellas, pues cuando el individuo reflexiona sobre ellas se produce aprendizaje, de tal forma que la conciencia de las propias creencias y concepciones puede surgir. Las investigaciones han evidenciado que las concepciones de los profesores pueden cambiar y en qué condiciones se producen tales cambios (Pehkonen, 1999, 2006). En contraste con la idea que cambios sustantivos en los profesores son concebidos generalmente como procesos graduales, complejos y difíciles (Guskey, 2003; como se cita en Bobis, Way, Anderson, & Martin, 2016), algunos autores como Liljedahl (2010) han notado cambios rápidos y profundos en las creencias y prácticas de los profesores, en varias circunstancias.

#### **4. Pregunta de investigación**

Lo presentado en el apartado anterior da sustento a los propósitos de la investigación doctoral, en la cual se busca profundizar en la comprensión, descripción y caracterización de los posibles cambios en las concepciones de un grupo de profesores (en ejercicio) de matemática de primeros semestres de universidad sobre las causas de los errores de sus estudiantes. Se propone una intervención en la que se promueve la reflexión crítica, el debate y la discusión por parte de los profesores participantes. La intervención es realizada por el investigador quien presenta a los profesores la teoría de obstáculos y la teoría de representaciones semióticas como referentes teóricos y de investigación que ayudan a explicar unas posibles causas de algunos errores provenientes de diversas fuentes (como su propia práctica y de la literatura especializada). La reflexión crítica se desarrolla en dos escenarios: mediante discusiones orientadas en grupos focales (focus group) y mediante entrevistas personales con el investigador. La información obtenida debe permitir realizar un análisis de corte cualitativo descriptivo para responder la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué cambios en las concepciones de los profesores sobre las causas de los errores en el aprendizaje de la matemática se producen a partir de una reflexión crítica (sustentada en la teoría de obstáculos y teoría de las representaciones semióticas de Duval) sobre el análisis de los errores de sus estudiantes?

#### **5. Metodología de investigación**

Para responder la pregunta de investigación doctoral, se propone un estudio cualitativo con un enfoque descriptivo; en un estudio cualitativo se busca

explorar, descubrir, construir y describir a través de una gran lente, examinando el alcance y profundidad de los fenómenos con el propósito de aprender más sobre ellos (Johnson & Christensen, 2008) y se analiza la realidad subjetiva indagando en los significados personales, las construcciones personales o sociales del conocimiento, se privilegia del estudio de los individuos y sus contextos particulares y se busca comprender lo subjetivo y dar sentido al mundo (Ernest, 1998). Se considera adicionalmente la noción de *teoría* presentada por Radford (2008), dada su pertinencia para la investigación en educación matemática. Radford (2008) sugiere que una teoría puede ser vista como una manera de producir comprensiones y vías de acción basadas en: un sistema  $P$  de principios básicos (el cual incluye visiones implícitas, declaraciones explícitas que delimitan el universo del discurso y perspectivas de investigación adoptadas), una metodología  $M$  (que incluye técnicas de recolección e interpretación de datos soportados por  $P$ ) y un conjunto  $Q$  de preguntas paradigmáticas de investigación. De acuerdo con Radford (2008) las teorías se pueden concebir “como organizadas (implícita o explícitamente) de acuerdo con tres componentes principales ( $P$ ,  $M$ ,  $Q$ )” (p. 321) de tal forma que éstos se interrelacionan de formas específicas.

Las estrategias e instrumentos de recolección de la información para el estudio deben permitir evidenciar las concepciones de los profesores sobre las causas del error en matemática (de sus estudiantes) y sus posibles cambios a través de sus respuestas y explicaciones.

Inicialmente se envía a unos profesores una carta de invitación (individual) a participar al grupo de profesores convocados. En esta carta adicionalmente se les solicita que identifiquen algunos errores en matemática de sus estudiantes y propongan posibles explicaciones para sus causas. A partir de los resultados de esta fase indagatoria se selecciona un grupo de profesores que será invitado a participar en las sesiones de trabajo y discusión en focus group y en entrevistas individuales.<sup>4</sup> La carta de invitación a participar se envía por correo electrónico y en algunos casos se entrega personalmente. En el transcurso de las entrevistas y los focus group, el investigador aprovecha los escenarios de diálogo, discusión y debate para presentar y explicar a los profesores algunas nociones de la teoría de obstáculos y de la teoría de representaciones semióticas de Duval, las cuales muy probablemente ellos no conocen. Se busca aprovechar las reacciones de los profesores al descubrir que los investigadores en el marco de la didáctica de la matemática han estudiado los obstáculos y las representaciones semióticas para explicar unas causas de los errores matemáticos de los estudiantes. Lo anterior permite al investigador brindar a los participantes un instrumento de reflexión y estudio sobre las causas del error en matemática; se considera que este instrumento podrá permitir a algunos profesores analizar y tratar de explicar los errores de sus

---

<sup>4</sup> En párrafos posteriores se describen las entrevistas y los focus group.

estudiantes desde una nueva e interesante óptica que toma distancia de explicaciones triviales.

De acuerdo con Wilkinson (2004) – como se cita en Onwuegbuzie, Dickinson, Leech, & Zoran, 2009 – un *grupo focal* o *focus group* es una forma de recolectar datos cualitativos, la cual esencialmente implica la participación de un pequeño número de personas en un grupo de discusión informal centrado en un tema o en un conjunto de temas específicos. Fontana y Frey (1994) afirman que las entrevistas grupales pueden proporcionar “otro nivel de recopilación de datos o perspectiva sobre el problema de investigación no disponible a través de entrevistas individuales” (p. 364). Freeman (2006) indica que el propósito fundamental de los grupos focales es establecer creencias, actitudes y sentimientos de los entrevistados por la exploración de los procesos grupales.

Las sesiones de focus group se desarrollan siguiendo algunas de las recomendaciones presentadas en Onwuegbuzie, Dickinson, Leech y Zoran (2009): sesiones de entre una y dos horas de duración, grupos focales de tres o cuatro participantes, tres o cuatro grupos focales pues esta multiplicidad ofrece ventajas al investigador para identificar en qué punto ocurre la saturación tanto de datos como teórica, y se considera la posibilidad de conformar un equipo de apoyo que cumpla con el rol de equipo moderador.

Como estrategia complementaria se propone la realización de entrevistas semiestructuradas cuyo propósito es el de profundizar sobre la información obtenida en los focus group (en los casos que sea necesario) y contribuir a la triangulación de la información. El tipo de entrevista propuesto es individual y en profundidad pues como lo indican Bonilla y Rodríguez (1997): “Las entrevistas individuales en profundidad son el instrumento más adecuado cuando se han identificado informantes o personas claves dentro de la comunidad” (p. 93).

El análisis de la información se realiza siguiendo una codificación abierta, categorización y saturación teórica (Johnson & Christensen, 2008); la información se organiza a través de matrices de análisis que permitan la emergencia de categorías que den cuenta de las creencias y concepciones de los profesores y sus cambios, aproximación para el estudio de las concepciones utilizada por Pehkonen (1999). Las evidencias de los cambios de concepciones sobre las causas del error en el aprendizaje de la matemática se podrán identificar, describir y caracterizar siguiendo el esquema de análisis propuesto por D’Amore y Fandiño Pinilla (2004) según el cual el investigador relaciona concepciones precedentes (P) con concepciones sucesivas (S), interpretando los posibles cambios. Se considera adicionalmente el uso de mapas cognitivos propuestos por Jones (1985) – como se cita en Llinares (1992) – que permiten representar gráficamente los sistemas de creencias de una persona.

## 6. Hipótesis de respuesta

Se espera que, como resultado de las discusiones y reflexiones, algunos de los profesores participantes cambien o al menos evidencien indicios de cambio en sus concepciones sobre las causas del error en matemática de sus estudiantes reconociendo los referentes teóricos que ayudan a comprender su naturaleza y los incorporen a sus análisis sobre las causas del error. Como investigador, se espera que el componente científico presente en este proceso de reflexión y discusión permitirá a algunos de estos profesores alejarse del carácter subjetivo de sus creencias sobre el error en matemática para dar paso a construcciones y explicaciones de mayor elaboración cognitiva que generen cambios en sus creencias y enriquezcan sus concepciones sobre el error en matemática.

## 7. Conclusiones

A pesar de los muchos esfuerzos realizados en didáctica de la matemática para explicar las causas posibles del error en matemática, aún es evidente que un buen porcentaje de profesores universitarios desconocen los resultados de investigación y los referentes teóricos con los que se intentan explicar las causas de tales errores; en el estudio de Ramírez (2013) al indagar con profesores universitarios de matemática sobre las causas del error de sus estudiantes, ellos las atribuían a hechos como falta de concentración o lectura deficiente. Sin embargo en ese mismo estudio se pudieron encontrar algunos indicios de reflexión de algunos de profesores que durante las entrevistas se cuestionaban sobre la naturaleza del error: cuando algunos profesores se enfrentan a la posibilidad de reflexionar críticamente sobre las causas del error en matemática tomando en consideración referentes teóricos y de investigación, muestran una cierta sensibilidad que denota posibilidades de cambio de sus concepciones frente a este aspecto del aprendizaje matemático.<sup>5</sup> Cambios de concepciones de los profesores de matemática pueden contribuir a enriquecer y fortalecer su ejercicio profesional. En la investigación doctoral propuesta se busca profundizar en el estudio de una forma posible de formación de profesores universitarios de matemática por medio de un escenario de discusión (focus group) entre pares que permita el diálogo y la discusión en torno a un tema de su particular interés: la causa del error en matemática, aprovechando el potencial de algunas nociones teóricas como obstáculos epistemológicos, obstáculos didácticos, misconcepciones, contrato didáctico, transformaciones semióticas de tratamiento y conversión y paradoja cognitiva de Duval.

---

<sup>5</sup> También existen *afortunadamente* casos en los cuales los profesores no están dispuestos a modificar sus concepciones.

## Referencias bibliográficas

- Alagia, H., Bressan, A. M., & Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2–3), 241–286.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
- Bobis, J., Way, J., Anderson, J., & Martin, A. J. (2016). Challenging teacher beliefs about student engagement in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(1), 33–55.
- Bonilla, E., & Rodríguez, P. (1997). *Más allá del dilema de los métodos: La investigación en ciencias sociales* (2ª ed.). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma.
- Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 2–8.
- Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 221–239.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En W. Vanhamme & J. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement de la mathématique: Comptes rendus de la XXVIII<sup>e</sup> rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101–117). Louvain-la-Neuve.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 164–198.
- Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques: Etudes dans le cadre de la théorie des situations didactique. *Petit x*, 57, 5–30.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Charnay, R. (1989). Les enseignants de mathématiques et les erreurs de leurs élèves. *Grand N*, 45, 31–41
- D'Amore, B. (1999). *Didattica della matematica*. Bolonia, Italia: Pitagora. [Edición en español: D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio].
- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. Barcelona: Reverté.
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, culture and mathematical thinking* [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 9(1), 177–195.
- D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Enseñanza de la matemática. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática)*, 17(1), 87–106. Recuperado de <https://rsddm.dm.unibo.it/articoli-di-ricerca-e-diffusione/182-2/>
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemáticas de la escuela secundaria superior. *Epsilon*, 58, 23–44.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: Convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de*

- Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 10(1), 39–68.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazzy, B. (2010). *Didáctica della matematica: Alcuni effetti del "contrato"*. Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri. [En curso de impresión en idioma español, Bogotá, Colombia: Magisterio].
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática: Análisis de situaciones con falta de aprendizaje*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37–65.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143–168.
- Economou, P. (1995). How teachers of mathematics confront students' errors. En G. Philippou, C. Christou, & A. Kakas (Eds.), *Proceedings of the Second Panhellenic Conference on Mathematics Education and the Informatics in Education* (pp. 383–400). Nicosia: Sighroni Epoxi.
- Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of art* (pp. 249–254). London, UK: Falmer Press.
- Ernest, P. (1998). The Epistemological basis of qualitative research in mathematics education: A postmodern perspective. En A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education* (pp. 22-39). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática: Evaluar e intervenir en forma mirada y específica*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Fontana, A., & Frey, J. (1994). Interviewing: The art of science. En Y. S. Lincoln & N. K. Denzin (Eds.), *The Handbook of Qualitative Research* (pp. 361–376). Thousand Oaks: Sage Publications.
- Freeman, T. (2006). 'Best practice' in focus group research: Making sense of different views. *Journal of advanced nursing*, 56(5), 491–497.
- Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, 6(1), 24–58.
- García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 9(1), 85–116.
- Godino, J. D., Batanero, M., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Guskey, T. R. (2003). What makes professional development effective? *Phi Delta Kappan*, 84(10), 748–750.
- Jones, S. (1985). The analysis of depth interviews. En R. Walker (Ed.), *Applied qualitative research* (pp. 56–70). Aldershot, Hants, Reino Unido: Gower Publishing Company Limited.
- Johnson, C., & Christensen, L. (2008). *Educational research: Quantitative, qualitative and mixed approaches* (3a ed.). Thousand Oaks, California: Sage.

- Lerman, S. (1999). Research on mathematics teachers' beliefs: A situated perspective. En E. Pehkonen & G. Törner (Eds), *Proceedings of the Workshop in Oberwolfach: Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 66–72). Duisburg, Alemania: Gerhard Mercator University.
- Liljedahl, P. (2010). Noticing rapid and profound mathematics teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(5), 411–423.
- Llinares, S. (1992). Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias epistemológicas de los profesores. En C. Marcelo García (Ed.), *La investigación sobre la formación del profesorado: Métodos de investigación y análisis de datos* (pp. 57–95). Buenos Aires, Argentina: Cincel.
- Milhaud, N. (1980). *Le comportement des maîtres face aux erreurs des élèves* (Master's thesis). Université de Bordeaux I, IREM de Bordeaux.
- Moreno, M., y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemática acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 21(2), 265–280.
- Onwuegbuzie, A. J., Dickinson, W. B., Leech, N. L., & Zoran, A. G. (2009). A qualitative framework for collecting and analyzing data in focus group research. *International Journal of Qualitative Methods*, 8(3), 1–21.
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of educational research*, 62(3), 307–332.
- Pehkonen, E. (1999). Conceptions and images of mathematics professors on teaching mathematics in school. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(3), 389–397.
- Pehkonen, E. (2006). What do we know about teacher change in mathematics? En L. Häggblom, L. Burman, & A.-S. Røj-Lindberg (Eds.), *Kunskapens och lärandets villkor. Festskrift tillägnad professor Ole Björkqvist* (pp. 77–87). Vasa: Åbo Akademi, Pedagoiska fakulteten, Specialutgåva.
- Pehkonen, E., & Törner, G. (1999). Introduction to the abstract book for the Oberwolfach meeting on belief research. En E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Proceedings of the Workshop in Oberwolfach: Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 109 – 117). Duisburg: Gerhard Mercator University.
- Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 317–327.
- Ramírez, H. (2013). *Tipología de errores y dificultades de aprendizaje de la Matemática de estudiantes de primer curso de Matemática: Análisis epistemológico, semiótico y didáctico* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
- Rojas, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos* (Tesis de Doctorado, Director Bruno D'Amore). Bogotá, Colombia: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de <http://die.udistrital.edu.co/publicaciones>
- Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: A comparison between semiotic perspectives* (Tesis de Doctorado, Director Bruno D'Amore). Palermo, Italia: Università di Palermo. Recuperado de <https://rsddm.dm.unibo.it/ph-d/>

- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Silver, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed directions. En E. A. Silver (Eds.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 247–266). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wilkinson, S. (2004). Focus group research. En D. Silverman (Ed.), *Qualitative research: Theory, method, and practice* (pp. 177–199). Thousand Oaks, CA: Sage.